CLASSES SUPÉRIEURES MPSI ET SPÉCIALES MP

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I OBJECTIFS DE FORMATION

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière MP, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique consituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. En revanche, certains résultats puissants, mais dont la démonstration est hors de portée au niveau des classes préparatoires, sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels.
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux–mêmes des questions, c'est–à–dire à prendre en compte une problématique mathématique. Les travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE) permettent de renforcer cette attitude, essentielle pour la formation scientifique, laquelle est par nature d'abord un questionnement. L'effort de synthèse doit constituer l'aboutissement de cette démarche.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre. C'est dans cette perspective, et à l'opposé de tout dogmatisme, que les structures constituent un outil pour une meilleure compréhension et une meilleure précision de la pensée et fournissent des méthodes pour l'étude des problèmes mathématiques.

- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement de modèles continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, notamment en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.
En première année, la maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.
En seconde année, le programme comporte la description des convergences usuelles de suites et de fonctions, grâce aux concepts d'espace vectoriel normé et d'application linéaire continue. La représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales (notions sur les transformations de Fourier et de Laplace et sur les intégrales eulériennes), l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle), l'étude des fonctions de plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude systématique des anneaux et des corps en a été écartée. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il met en valeur l'importance du concept de groupe pour les méthodes de la géométrie.
En première année, le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, calcul matriciel, espaces vectoriels euclidiens, automorphismes orthogonaux) et de ses interventions en algèbre, en analyse et en géométrie affine et euclidienne ; il comporte en outre l'étude de l'arithmétique élémentaire et des polynômes à une indéterminée.
En seconde année, le programme est organisé autour de l'algèbre linéaire (dualité, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices, réduction des formes quadratiques). Il comporte en outre une étude élémentaire des actions de groupe et quelques compléments d'arithmétique.

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention : apports du langage géométrique et des modes de représentation et, en seconde année, emploi de transformations, groupes de symétrie, construction et emploi d'invariants, classification d'objets grâce à l'action d'un groupe sur ces objets.

e) *Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles (mécanique, électrocinétique, électronique, automatique, optique, cinétique chimique), le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets (vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, équations différentielles modélisant l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

f) *Rôle de la pensée algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intégre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances. En mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes n'est exigible des étudiants.
Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie, qu'ils soient mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En outre, de nombreux travaux pratiques donnent lieu à l'exploitation du logiciel de calcul symbolique et formel étudié dans le programme d'informatique.

g) *Emploi des calculatrices*

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe et de la discipline considérées. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir–faire de base et sont seules exigibles :
- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

3) Conception et organisation de la formation

a) *Organisation du travail de la classe*

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit–il, de théories éventuellement suivies d'applications. Il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous–tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'analyser les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et résultats essentiels, savoir analyser les démarches mises en jeu dans les démonstrations et les techniques de raisonnement, maîtriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type d'exercices est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés, en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances à mettre en œuvre dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser les exigences mentionnées par le programme. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barême doit en tenir compte. En première période des classes de première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution.
- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse critique, grâce à une analyse comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année dans les épreuves d'admission en seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

4) Interprétation et délimitation des programmes

a) *Objectifs*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des concours. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets proposés aux concours.

b) *Organisation du texte des programmes*

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles–mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.

- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des travaux pratiques, également présentés en deux colonnes ; à gauche sont fixés d'une part le champ des questions mathématiques à étudier et d'autre part les méthodes et les techniques à connaître et à savoir mettre en œuvre, à droite un commentaire indique des repères pour le niveau d'approfondissement à donner à cette étude ou à cette mise en œuvre. Les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe §.

c) *Connaissances et capacités exigibles des étudiants*

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre exemples, méthodes, algorithmes. . .) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.
- Celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes et des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite, dans les bandeaux ou dans les travaux pratiques.
- Celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant "hors programme". Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
- Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants : il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution "exemples de . . ." (dont la fonction est d'indiquer le champ des problèmes et des phénomènes mathématiques à étudier) et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution "aucune connaissance spécifique sur . . . n'est exigible des étudiants", accompagnée le cas échéant de la locution "les méthodes à suivre, ou les indications utiles, doivent être fournies aux étudiants".

En outre, pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution "la démonstration n'est pas exigible des étudiants", le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre. La locution "la démonstration est hors programme"signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat.

Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution "définition de. . ." ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

II PROGRAMME DE LA CLASSE MPSI

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : suites de nombres réels et de nombres complexes, fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$ *à valeurs réelles ou complexes, courbes planes, notions élémentaires sur les fonctions de deux variables réelles.*
Le programme combine l'étude globale des suites et des fonctions (opérations, majorations, caractère lipschitzien, monotonie, convexité, existence d'extremums...) et l'étude de leur comportement local ou asymptotique. En particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de tangente.
Il combine aussi l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie d'une suite ou d'une fonction, existence de limites, continuité, existence de zéros et d'extremums de fonctions, existence de tangentes...) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, évaluations asymptotiques de suites et de fonctions, approximations de zéros et d'extremums de fonctions, propriétés métriques des courbes planes...).
En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue ou du module, emploi du calcul différentiel et intégral (recherche d'extremums, inégalités des accroissements finis et de la moyenne, majorations tayloriennes...). Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations (caractère borné, croissance, monotonie, existence d'une limite, continuité en un point, continuité sur un intervalle, continuité uniforme, dérivabilité en un point...). En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (approximations de solutions d'équations numériques, approximations d'une intégrale...) et d'algorithmes de calcul formel (dérivation, primitivation...) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé de courbes.

I. NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES, SUITES ET FONCTIONS

Cette partie figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

Pour l'existence et la recherche de limites de suites ou de fonctions, il convient d'utiliser les résultats établis dans le cours, de préférence au recours direct à la définition.

1- Nombres réels

Il est souvent commode d'identifier la droite euclidienne munie d'une base orthonormale au $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{R}$*, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres réels.*
La notion de corps totalement ordonné est hors programme.

a) Corps $\mathbf{R}$ des nombres réels

Corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.

La construction du corps des nombres réels est hors programme.

Valeur absolue d'un nombre réel, distance de deux points, valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
Inégalité triangulaire

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Interprétation en termes de distances.

En particulier, si $|u| \leqslant k < 1$, alors

$$1 - k \leqslant |1 + u| \leqslant 1 + k.$$

Les étudiants doivent savoir utiliser ces inégalités afin de majorer ou minorer le module d'une somme.

Définition des intervalles de $\mathbf{R}$. Tout intervalle $]a, b[$ non vide rencontre $\mathbf{Q}$ et son complémentaire.

Toute partie convexe de $\mathbf{R}$ est un intervalle.

Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure. Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure. Définition de la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}$.

Congruence des nombres réels modulo a, où $a > 0$.

Tout nombre réel x s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x = na + y$, où $n \in \mathbf{Z}$ et $0 \leqslant y < a$.

Partie entière d'un nombre réel. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} ; approximation par défaut, par excès.

La notion de développement décimal illimité est hors programme.

b) Groupe $\mathbf{R}_+^*$

Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs. Isomorphisme $x \mapsto \mathrm{e}^x$ (également noté $x \mapsto \exp x$) de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$; isomorphisme réciproque $y \mapsto \ln y$.

La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont supposées connues, ainsi que leurs équations fonctionnelles.

2- Suites de nombres réels

L'objectif est double :
- Étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée, en relation avec la description de phénomènes discrets.
- Description et mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'un nombre réel à l'aide de suites et comparaison de leurs performances, en relation avec l'étude des fonctions et les problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques.

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence…) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles…).
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cours que des problèmes, le fait que pour étudier la convergence d'une suite u_n vers un nombre a, il est utile de se ramener à la convergence de $u_n - a$ vers 0.

Pour la notion de limite d'une suite (u_n) de nombres réels, on adopte les définitions suivantes :
- Étant donné un nombre réel a, on dit que (u_n) admet a pour limite si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier n, la relation $n \geqslant N$ implique la relation $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$; le nombre a est alors unique, et on le note $\lim_n u_n$. Lorsqu'un tel nombre a existe, on dit que la suite (u_n) est convergente, ou qu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est divergente.
- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$; on dit alors que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Tout vocabulaire topologique est hors programme.

a) Suites de nombres réels

Algèbre des suites de nombres réels, relation d'ordre. Suites majorées, minorées. Algèbre des suites bornées. Suites monotones, strictement monotones.

Pour la présentation du cours, le programme se place dans le cadre des suites indexées par $\mathbf{N}$. On effectue ensuite une brève extension aux autres cas usuels.

b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence.
Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $u_n \to a$ équivaut à $u_n - a \to 0$.

Toute suite convergente est bornée.

Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Espace vectoriel des suites convergeant vers 0 ; produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0.

Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Si $|u_n| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si $v_n \to a$ et $w_n \to a$, alors $u_n \to a$.
Si $v_n \leqslant u_n$ et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.

Suites extraites d'une suite. Toute suite extraite d'une suite convergeant vers a converge vers a.

Application à la divergence d'une suite bornée : il suffit d'exhiber deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.
La notion de valeur d'adhérence d'une suite est hors programme.

c) Relations de comparaison

Étant donnée une suite (α_n) de nombres réels non nuls, définition d'une suite (u_n) de nombres réels dominée par (α_n), négligeable devant (α_n).

Notations $u_n = \mathrm{O}(\alpha_n),\ u_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$.

Caractérisations à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{\alpha_n}\cdot$

Définition de l'équivalence de deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels non nuls. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Notation $u_n \sim v_n$.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}\cdot$

Si $u_n = \alpha_n + w_n$, où w_n est négligeable devant α_n, alors $u_n \sim \alpha_n$.

Si $u_n \sim v_n$, alors, à partir d'un certain rang, le signe de u_n est égal à celui de v_n.

Comparaison logarithmique : si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
Comparaison des suites de référence :

$$n \mapsto a^n,\ n \mapsto n^\alpha,\ n \mapsto (\ln n)^\beta,\ n \mapsto n!$$

où $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

d) Théorèmes d'existence de limites

Toute suite croissante majorée (u_n) converge, et

$$\lim_n u_n = \sup_n u_n.$$

Extension au cas d'une suite croissante non majorée.

Théorème des segments emboîtés.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter la notion de suite dichotomique d'intervalles, ainsi que celle de suites adjacentes.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

3- Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

L'objectif est double :
- Étude du comportement global et local d'une fonction donnée, en relation avec la description de l'évolution de phénomènes continus.
- Emploi de fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques, d'équations différentielles, mesures de grandeurs géométriques et physiques...).

En ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, caractère lipschitzien, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cours que des problèmes, le fait que pour établir qu'un nombre b est limite d'une fonction f, il est utile de se ramener au cas $b = 0$.

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points et à valeurs réelles.

Pour la notion de limite d'une fonction f en un point a (appartenant à I ou extrémité de I), on adopte les définitions suivantes :
- Étant donnés des nombres réels a et b, on dit que f admet b pour limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de I, la relation $|x - a| \leqslant \delta$ implique la relation $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$; le nombre b est alors unique, et on le note $\lim_a f$. Lorsqu'un tel nombre b existe, on dit que f admet une limite finie au point a.
- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, ou lorsque $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert de centre a lorsque $a \in \mathbf{R}$, avec un intervalle $]c, +\infty[$ lorsque $a = +\infty$ et avec un intervalle $]-\infty, c[$ lorsque $a = -\infty$.
Tout autre vocabulaire topologique est hors programme.

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Algèbre des fonctions à valeurs réelles, relation d'ordre.	Définition de $\lvert f\rvert$, $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, f^+ et f^-.
Fonctions majorées, minorées. Algèbre des fonctions bornées.	Relations $f = f^+ - f^-$ et $\lvert f\rvert = f^+ + f^-$.
Définition d'un extremum, d'un extremum local.	Notations $\max\limits_{x\in I} f(x)$ et $\max\limits_{I} f$.
Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.	Notations $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $\sup\limits_{I} f$.
Fonctions monotones, strictement monotones ; composition.	
Sous-espace vectoriel des fonctions paires, des fonctions impaires.	Les fonctions paires et les fonctions impaires constituent des sous-espaces supplémentaires.
Algèbre des fonctions T-périodiques.	
Espace vectoriel des fonctions lipschitziennes ; composée de fonctions lipschitziennes.	Si f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f l'est aussi sur $[a, c]$.

b) Étude locale d'une fonction

Limite d'une fonction f en un point a, continuité en un point. Lorsque $b \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ équivaut à la relation $f(x) - b \to 0$. Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ lorsque $x \to a$ équivaut à la relation $f(a + h) \to b$ lorsque $h \to 0$.	Lorsque $a \in I$, dire que f a une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point. Lorsque $a \notin I$, f a une limite finie en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point.
Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.	Les limites à gauche (ou à droite) en a sont définies par restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (à $I \cap]a, +\infty[$).

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

Espace vectoriel des fonctions tendant vers 0 en un point a ; produit d'une fonction d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.

Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Si $|f(x)| \leqslant g(x)$ et $g(x) \to 0$, alors $f(x) \to 0$.

Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si $g(x) \to b$ et $h(x) \to b$, alors $f(x) \to b$.

Limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente.
Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point.

Existence d'une limite d'une fonction monotone.

Comparaison des bornes (supérieure ou inférieure) et des limites (à gauche ou à droite).

c) Relations de comparaison

Étant donnés un point a (appartenant à I ou extrémité de I) et une fonction φ à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur I privé de a, définition d'une fonction f à valeurs réelles, dominée par φ (négligeable devant φ) au voisinage de a.

Notations $f = \mathrm{O}(\varphi)$, $f = \mathrm{o}(\varphi)$.

Caractérisations à l'aide du quotient $\dfrac{f}{\varphi}\cdot$

Définition de l'équivalence au voisinage de a de deux fonctions f et g à valeurs réelles ne s'annulant pas sur I privé de a. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Notation $f \sim g$.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{f}{g}\cdot$

Si $f = \varphi + h$, où h est négligeable devant φ, alors $f \sim \varphi$.

Si $f \sim g$ alors, au voisinage de a, le signe de $f(x)$ est égal à celui de $g(x)$.

Comparaison, lorsque $x \to +\infty$, des fonctions

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x},\ x \mapsto x^{\beta},\ x \mapsto (\ln x)^{\gamma}.$$

Comparaison, lorsque $x \to 0$, des fonctions

$$x \mapsto x^{\alpha} \text{ et } x \mapsto \big(\ln x\big)^{\beta}.$$

Développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point ; opérations algébriques sur les développements limités : somme, produit ; développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$, application au quotient.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.
Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

d) Fonctions continues sur un intervalle

Algèbre $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I et à valeurs réelles.
Composée de deux fonctions continues.

Si f est continue, $|f|$, f^{+}, et f^{-} le sont.

Restriction d'une fonction continue à un intervalle J contenu dans I.
Prolongement par continuité en une extrémité de I.

Si f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f l'est aussi sur $[a, c]$.

Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue.

La démonstration de ces deux résultats n'est pas exigible des étudiants.

Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de la bijection réciproque.

Définition de la continuité uniforme. Continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants. Toute étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.

4- Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de Terminale. Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques, à la trigonométrie et à la géométrie.

En ce qui concerne les suites et fonctions à valeurs complexes, l'objectif est d'effectuer une brève extension des principales propriétés des suites et fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.

Il est souvent commode d'identifier $\mathbf{C}$ à l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$, notamment pour les problèmes d'origine géométrique, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres complexes.

a) Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes

Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, structure de $\mathbf{R}$-algèbre, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans $\mathbf{C}$.	Aucune connaissance sur la construction du corps $\mathbf{C}$ n'est exigible des étudiants. Notations $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$.
Isomorphisme canonique de l'espace $\mathbf{R}^2$ sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Affixe d'un point, d'un vecteur ; image d'un nombre complexe.	Interprétation géométrique des transformations $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto z + b$.
Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire ; interprétation en termes de distances. Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1. Isomorphisme $(\rho, u) \mapsto \rho\, u$ de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$ sur $\mathbf{C}^*$.	Notation $\lvert z\rvert$; relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$. Interprétation géométrique de $\lvert z\rvert$, de $\lvert z - a\rvert$; disque ouvert (fermé) de centre a. Si $\lvert u\rvert \leqslant k < 1$, alors $1 - k \leqslant \lvert 1 + u\rvert \leqslant 1 + k.$

b) Suites et fonctions à valeurs complexes

Algèbre des suites de nombres complexes ; parties réelle et imaginaire d'une suite ; conjugaison. Algèbre des suites bornées. Limite d'une suite de nombres complexes, convergence et divergence. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques sur les limites.	Par identification canonique de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$, les notions de ce paragraphe s'appliquent aux suites et aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.
Algèbre des fonctions à valeurs complexes ; parties réelle et imaginaire d'une fonction ; conjugaison. Algèbre des fonctions bornées.	Notations $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\bar{f}$, $\lvert f\rvert$.
Limite d'une fonction à valeurs complexes en un point a, continuité en un point ; caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point. Opérations algébriques sur les limites.	
Algèbre $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes.	

c) Groupe $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, relations d'Euler. L'application $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ dont le noyau est $2\pi\mathbf{Z}$. Formule de Moivre.	Par définition, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta$ où $\theta \in \mathbf{R}$. La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions cosinus, sinus et tangente sont supposées connues, ainsi que leurs formules d'addition. Les étudiants doivent savoir exprimer $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ à l'aide de $\tan\dfrac{\theta}{2}$ et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1.
Arguments d'un nombre complexe. Écriture d'un nombre complexe $z \neq 0$ sous la forme $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ (forme trigonométrique).	Morphisme $(\rho, \theta) \mapsto \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ sur $\mathbf{C}^*$.
Groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.	

d) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \quad \text{où} \quad z = x + \mathrm{i}y.$	
L'application $z \mapsto \mathrm{e}^z$ (également notée $z \mapsto \exp z$) est un morphisme surjectif de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$ dont le noyau est $2\mathrm{i}\pi\mathbf{Z}$. Module et arguments de e^z ; résolution de l'équation $\mathrm{e}^z = a$.	La notion de logarithme complexe est hors programme.

e) Nombres complexes et géométrie plane

(Seconde période) Interprétation des transformations : $z \mapsto az$, $z \mapsto az + b$. Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}\cdot$ Condition de cocyclicité de quatre points.	Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, alignement, orthogonalité.

Travaux pratiques

Exemples d'obtention de majorations et de minorations d'expressions réelles ou du module d'expressions complexes ; exemples d'emploi pour l'étude de suites et de fonctions.	
§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes.	Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur, notamment pour évaluer le poids respectif des termes d'une somme.
§ Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe a de f.	Il convient de mettre en valeur le rôle des variations de f et les interprétations graphiques. L'étude est à mener sur des exemples ; aucun énoncé général n'est exigible des étudiants. Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers a, les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type lipschitzien $\|f(x) - f(a)\| \leqslant k\|x - a\|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type $\|f(x) - f(a)\| \leqslant \lambda\|x - a\|^2$.
Exemples d'étude du comportement local et asymptotique de fonctions d'une variable réelle et d'emploi de développements limités.	L'étude de singularités et la recherche de développements limités ne sont pas des objectifs en soi, et tout excès de technicité sur ces points est à éviter.

Exemples d'étude du comportement global de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : étude des variations, des zéros et du signe.

§ Exemples d'emploi de nombres complexes en algèbre (polynômes, équations algébriques...).

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en trigonométrie.

Les étudiants doivent savoir linéariser un polynôme trigonométrique, exprimer une somme de deux cosinus ou de deux sinus sous forme de produit, connaître les expressions de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $1+\cos\theta$ et $1-\cos\theta$ à l'aide de $\theta/2$, ainsi que la relation $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ et son interprétation géométrique.

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en géométrie plane.

II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Cette partie figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

Le programme est organisé autour de trois axes :
- Dérivation en un point et sur un intervalle ; notions sur la convexité.
- Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux, à partir de l'intégration des fonctions en escalier ; notions sur l'intégration sur un intervalle quelconque, d'abord dans le cadre des fonctions positives, puis des fonctions à valeurs réelles ou complexes dont le module est intégrable.
- Théorème fondamental reliant l'intégration et la dérivation ; exploitation de ce théorème pour le calcul différentiel et intégral, et notamment pour les formules de Taylor.
Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

L'étude générale de la dérivation et de l'intégration doit être illustrée par de nombreux exemples portant sur les fonctions usuelles (qui, par commodité de rédaction, ne figurent qu'au chapitre 6) et celles qui s'en déduisent.

Les fonctions considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ *contenant au moins deux points et, dans les trois premiers chapitres, sont à valeurs réelles.*

1- Dérivation des fonctions à valeurs réelles

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Extremums locaux des fonctions dérivables.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et l'interprétation cinématique de la notion de dérivée en un point.

Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

Notations f', $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz).

Notations $f^{(k)}$, $D^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

b) Étude globale des fonctions dérivables

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis :
- Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.
- Si $|f'| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables.

Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation graphique et cinématique de ces résultats.

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Brève extension au cas d'une limite infinie.

c) Fonctions convexes

(Seconde période)

Définition, interprétation graphique (tout sous-arc est sous sa corde).
Caractérisation des fonctions convexes par la convexité de la partie du plan située au dessus de la courbe, par la croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité.

Inégalité de convexité : si $\lambda_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, alors
$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(a_j).$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est convexe si et seulement si f' est croissante. La courbe est alors située au dessus de chacune de ses tangentes.

L'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions convexes est hors programme.

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Les notions de fonction réglée et de fonction intégrable au sens de Riemann sont hors programme.

a) Fonctions continues par morceaux

Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a,b]$, d'une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à φ. Algèbre des fonctions en escalier sur un segment.

Algèbre (non unitaire) des fonctions en escalier sur $\mathbf{R}$ (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).

Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Approximation des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que
$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Linéarité. Croissance.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Notations $\int_I f$, $\int_{[a,b]} f$. Linéarité.
Croissance ; inégalité $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$.
Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Invariance de l'intégrale par translation.

Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction à valeurs positives en termes d'aire. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur la notion d'aire.

Valeur moyenne d'une fonction.

Inégalité de la moyenne
$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

En particulier
$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$
Toute autre formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.
Produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_I fg$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$; inégalité de Cauchy-Schwarz.

Approximation de l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,b]$ par une somme de Riemann $R_S(f)$ associée à une subdivision S de $[a,b]$.

Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de pas inférieur ou égal à δ,

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_S(f) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Cas où f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Définition de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où a et b appartiennent à I. Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

3- Intégration et dérivation

a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive d'une fonction continue.
Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Il convient de montrer sur des exemples que cette définition ne peut être étendue sans changement au cas des fonctions continues par morceaux.

Théorème fondamental : étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I et un point $a \in I$,
- la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;
- pour toute primitive h de f sur I,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a).$$

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur I et une fonction φ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a,b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.

b) Formules de Taylor

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I, formule de Taylor à l'ordre p en un point a de I.
Expression intégrale du reste.
Majoration du reste : inégalité de Taylor-Lagrange.

Relation $f(x) = T_p(x) + R_p(x)$, où

$$T_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a).$$

Développement limité d'une primitive, d'une dérivée.
Existence d'un développement limité à l'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: formule de Taylor-Young.

Il convient de donner un exemple où f admet un développement limité à l'ordre 2 en un point sans être deux fois dérivable en ce point.

c) Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et une subdivision $S = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ à pas constant, approximation de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$I_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \big[f(a_j) + f(a_{j+1})\big].$$

Majoration

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f).$$

Cette méthode consiste à approcher f, sur chaque intervalle $[\alpha,\beta]$ de la subdivision S, par la fonction affine φ telle que $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ et $\varphi(\beta) = f(\beta)$, et à exploiter la majoration suivante, valable pour tout élément t de $[\alpha,\beta]$,

$$|f(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} M_2(f).$$

Algorithme d'approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

Il convient de souligner l'intérêt des subdivisions dichotomiques.

4- Dérivation et intégration des fonctions à valeurs complexes

L'objectif est d'effectuer une brève extension des notions et propriétés suivantes, vues pour les fonctions à valeurs réelles, aux fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs complexes.

Par identification de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$, les notions de ce chapitre s'appliquent aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

a) Dérivation

Dérivabilité en un point, caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire ; opérations sur les fonctions dérivables. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs complexes, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$; dérivée n-ième d'un produit.

Caractérisation des fonctions constantes.
Il convient de montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que le théorème de Rolle ne s'étend pas.

b) Intégration

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, linéarité.
Inégalité $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Par définition,

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_I \operatorname{Im} f.$$

c) Intégration et dérivation

Extension du théorème fondamental.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Formule de Taylor avec reste intégral ; inégalité de Taylor-Lagrange ; formule de Taylor-Young.

Interprétation cinématique.

5- Courbes planes paramétrées

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$.

L'objectif est d'exploiter, par identification de $\mathbf{C}$ au plan euclidien $\mathbf{R}^2$, les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs complexes pour l'étude cinématique et géométrique des courbes planes.

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

L'étude des courbes paramétrées fait l'objet d'un approfondissement au chapitre IV.1.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$; interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Étant données deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dérivation de $(f|g)$, de $\|f\|$ et de $\operatorname{Det}(f, g)$.

En vue de l'enseignement de la mécanique, il convient de donner la caractérisation d'un mouvement uniforme, d'un mouvement rectiligne, d'un mouvement à accélération centrale. En mathématiques, aucune connaissance spécifique sur ces points n'est exigible des étudiants.

Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation ; point régulier, birégulier.

Les changements de paramétrage sont supposés de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que leurs applications réciproques.

b) Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des demi-tangentes en un point A de Γ (le vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{AM}$ admet une limite), de la tangente en un point A. Existence d'une tangente en un point régulier ; vecteur unitaire $\overrightarrow{T}$ de la tangente en ce point.
Cas d'un point A où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

Position locale de Γ par rapport à la tangente en un point A birégulier (concavité), en un point A non birégulier (inflexions, rebroussements).

Il convient d'abord d'étudier la position locale de Γ par rapport à une droite D passsant par A dirigée par un vecteur n'appartenant pas à la direction de la tangente.

Branches infinies : directions asymptotiques, asymptotes. Position locale de la courbe par rapport à l'une de ses asymptotes.

Cette étude porte seulement sur des exemples ; aucun énoncé général n'est exigible des étudiants.

6- Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

Fonctions exponentielles réelles, fonctions logarithmes. Fonctions puissances.
Fonctions hyperboliques ch, sh et th.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques de ces fonctions.
En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule connaissance exigible des étudiants est la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ et son interprétation géométrique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

b) Fonctions circulaires

Fonctions circulaires cos, sin et tan.
Définition et dérivation des fonctions circulaires réciproques Arccos, Arcsin et Arctan.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions circulaires et des fonctions circulaires réciproques. Aucune autre connaissance spécifique sur les fonctions circulaires réciproques n'est exigible des étudiants.

c) Fonction exponentielle complexe

Dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ où $a \in \mathbf{C}$; dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$, où φ est à valeurs complexes.

d) Primitives des fonctions usuelles

Primitives de $t \mapsto (t-a)^n,\ a \in \mathbf{C},\ n \in \mathbf{Z}$.

Lorsque $n = -1$, on se ramène à l'intégration de la partie réelle et de la partie imaginaire ; la notion de fonction logarithme complexe est hors programme.

Primitives de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} P(t)$ où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$.
Tableau des primitives des fonctions usuelles.

e) Développements limités des fonctions usuelles

Développement limité à l'origine des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, $a \in \mathbf{C}$, $t \mapsto (1+t)^a$, $a \in \mathbf{R}$.

Les étudiants doivent savoir en déduire les autres développements limités usuels.

f) Caractérisation des fonctions usuelles

(Seconde période)
Caractérisation de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ ($a \in \mathbf{C}$) par l'équation différentielle $y' = a\,y$ et la condition initiale $y(0) = 1$, de la fonction $t \mapsto t^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) par l'équation différentielle $t\,y' = \alpha y$ et la condition initialle $y(1) = 1$.
Caractérisation des fonctions linéaires, exponentielles réelles, logarithmes, puissances et $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ ($a \in \mathbf{C}$) par la continuité et leur équation fonctionnelle.

L'application $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ définit une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbf{U}$ privé de -1, dont l'application réciproque est continue.

Théorème de relèvement d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{U}$. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geqslant 2$.

Le théorème de relèvement est énoncé essentiellement en vue de l'étude des courbes paramétrées. Sa démonstration n'est pas exigible des étudiants.

7- Intégration sur un intervalle quelconque

Ce chapitre figure au programme de la seconde période.

a) Fonctions continues intégrables à valeurs positives

Une fonction continue positive f est dite intégrable (ou sommable) sur un intervalle I s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I, $\int_J f \leqslant M$.
On pose alors
$$\int_I f = \sup_J \int_J f.$$
Opérations sur les fonctions continues intégrables positives : somme, produit par un scalaire positif. Croissance : si f et g sont continues sur I, si $0 \leqslant f \leqslant g$ et si g est intégrable, f l'est aussi et $\int_I f \leqslant \int_I g$.
Si a appartient à I, f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$ et sur $I \cap [a, +\infty[$.

S'il existe une suite croissante (J_n) de segments dont la réunion est égale à I et telle que, pour tout n, $\int_{J_n} f \leqslant M$, alors f est intégrable sur I.
Dans ces conditions, pour toute suite (J_n) du type précédent
$$\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

Caractérisation de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ à l'aide de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cas des fonctions définies sur $]a, b]$.
Comparaison à une fonction de référence.

Intégrabilité de $t \mapsto t^\alpha$ sur $[a, +\infty[$, sur $]0, a]$.

b) Fonctions continues intégrables à valeurs complexes

Une fonction continue à valeurs complexes f est dite intégrable (ou sommable) sur I si $|f|$ est intégrable.
Espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes intégrables sur $\mathbf{R}$.

Si f et g sont continues, si $|f| \leqslant g$ et si g est intégrable, alors f est intégrable.

Une fonction continue à valeurs réelles f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont ; on pose alors
$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Dans ces conditions, pour toute suite (J_n) du type précédent
$$\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

Une fonction continue à valeurs complexes f est intégrable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont ; on pose alors
$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_I \operatorname{Im} f.$$

Linéarité de l'intégrale. Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.

Si f est continue intégrable, $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

8- Équations différentielles

Ce chapitre figure au programme de la seconde période.

L'objectif, très modeste, est d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre et les équations linéaires du second ordre à coefficients constants.
Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée (échelon unité, créneau, exponentielle réelle ou circulaire) et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscilllation, amortissement, fréquences propres, résonance. Dans le cadre de tels problèmes, on peut être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux) mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Solutions d'une équation différentielle

Définition d'une solution sur un intervalle d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$, d'une solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Interprétation graphique.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est hors programme.

b) Équations linéaires du premier ordre

Équation $a(x)y'+b(x)y = c(x)$, où a, b, c sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. Équation sans second membre associée. Description de l'ensemble des solutions.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée sur un intervalle où a ne s'annule pas. Structure de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée. Expression des solutions sous forme intégrale.

c) Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation $ay''+by'+cy = f(x)$, où a, b, c sont des nombres complexes, $a \neq 0$, et f une somme de fonctions de type $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Structure de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions : variations, recherche des zéros et du signe d'une fonction, obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extremums, inégalités de convexité.

§ Exemples d'algorithmes d'approximation d'une solution d'une équation numérique et de comparaison de leurs performances.

Les étudiants doivent connaître les méthodes de dichotomie, d'itération et de Newton, et savoir comparer leurs performances sur les exemples étudiés.

§ Exemples de calcul de primitives et d'intégrales.

Les étudiants doivent savoir calculer une primitive d'une fonction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles. En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.

§ Exemples d'algorithmes de calcul approché d'intégrales et de comparaison de leurs performances.

La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.

Exemples d'étude et de calcul d'intégrales de fonctions sur un intervalle quelconque.

Le programme se limite à des cas simples, où la comparaison à une fonction de référence (puissance ou exponentielle) permet d'étudier l'intégrabilité.

§ Exemples d'étude locale et de construction de courbes paramétrées et d'emploi de paramétrages d'ensembles du plan définis par des conditions géométriques ou mécaniques.

Exemples d'étude d'équations différentielles : équations linéaires du premier ordre, équations linéaires du second ordre à coefficients constants, équations à variables séparables.

Il convient d'exploiter notamment des problèmes issus de la géométrie et des autres disciplines scientifiques.

III. NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

Cette partie figure au programme de la seconde période.

Elle constitue une première prise de contact avec les fonctions de plusieurs variables ; toute technicité est à éviter aussi bien pour la présentation du cours qu'au niveau des exercices et problèmes.

L'objectif, très modeste, est double :
- Étudier quelques notions de base sur les fonctions de deux variables réelles (continuité, dérivation et intégration).
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes, issus notamment des autres disciplines scientifiques.

En vue de l'enseignement de ces disciplines, il convient d'étendre brièvement ces notions aux fonctions de trois variables réelles. Mais, en mathématiques, les seules connaissances exigibles des étudiants ne portent que sur les fonctions de deux variables.
Les suites d'éléments de $\mathbf{R}^2$ *et les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$ *ont déjà été étudiées en se ramenant aux suites et fonctions à valeurs réelles par passage aux coordonnées (cf. chapitres I.4 et II.4).*
Il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes concernant les fonctions de deux variables réelles peuvent se ramener aux problèmes correspondant aux fonctions d'une variable en paramétrant le segment $[a, a+h]$*, ce qui permet d'écrire* $f(a+h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$ *où, pour tout* $t \in [0,1]$, $\varphi_h(t) = f(a+th)$.

1- Espace $\mathbf{R}^2$, fonctions continues

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie A *de* $\mathbf{R}^2$*. Pour la pratique, on se limite aux cas où* A *est définie par des conditions simples.*

Pour définir la notion de limite, on procède comme pour les fonctions d'une variable réelle.

a) Espace $\mathbf{R}^2$

Norme $\|x\|_\infty = \sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$. Équivalence de cette norme avec la norme euclidienne $\|x\|_2$. Définition des parties bornées de $\mathbf{R}^2$.	L'étude générale des normes sur $\mathbf{R}^2$ est hors programme.
Définition des parties ouvertes et des parties fermées de $\mathbf{R}^2$.	Les opérations sur les ouverts et les fermés, ainsi que les notions de voisinage, d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme.
Définition séquentielle d'un point adhérent à une partie A de $\mathbf{R}^2$. Caractérisation séquentielle des parties fermées.	
Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée d'éléments de $\mathbf{R}^2$, on peut extraire une suite convergente.	La démonstration de ce théorème est hors programme.

b) Fonctions continues de deux variables

Algèbre des fonctions définies sur A et à valeurs réelles. Applications partielles associées à une telle fonction.	
Espace vectoriel des fonctions lipschitziennes. Les applications coordonnées sont lipschitziennes dans le rapport 1.	Si f est définie sur un rectangle $[a,b] \times [c,d]$ et si les applications partielles $x_1 \mapsto f(x_1,x_2)$ et $x_2 \mapsto f(x_1,x_2)$ sont lipschitziennes dans les rapports respectifs k_1 et k_2, alors f est lipschitizienne dans le rapport $k = k_1 + k_2$.
Limite et continuité en un point a d'une fonction définie sur A et à valeurs réelles. Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point.	Pour la notion de limite, on suppose que a est adhérent à A. Il convient de montrer, sur un exemple simple, que la continuité des applications partielles n'implique pas la continuité, mais l'étude de la continuité partielle est hors programme.

Algèbre des fonctions continues sur A et à valeurs réelles.

Extension des notions de limite et de continuité à une application de A dans $\mathbf{R}^2$; caractérisation à l'aide des coordonnées.
Continuité d'une application composée.
Toute fonction continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.

Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles, alors pour tout nombre réel α, l'ensemble des points $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x_1, x_2) \geqslant \alpha$, ou tels que $f(x_1, x_2) = \alpha$, est une partie fermée de $\mathbf{R}^2$; de même l'ensemble des points $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x_1, x_2) > \alpha$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.

Il convient de mettre en valeur le fait qu'une partie de $\mathbf{R}^2$ définie par des inégalités larges (strictes) est fermée (ouverte). En revanche, la caractérisation de la continuité par image réciproque d'ouverts ou de fermés est hors programme.

2- Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles : calcul différentiel

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.

L'objectif essentiel est d'introduire quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, développement limité à l'ordre 1, gradient et de les appliquer aux extremums locaux et aux coordonnées polaires ; en revanche, les notions de fonction différentiable et de différentielle en un point sont hors programme.
En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'étendre brièvement ces notions au cas où f est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et de définir les coordonnées cylindriques et sphériques mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ces points n'est exigible des étudiants.

a) Dérivées partielles premières

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h, notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Définition des dérivées partielles, notées $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U ; on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée au point a de U selon le vecteur h, et l'on pose $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi'_h(0)$.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (pour tout vecteur h, $x \mapsto \mathrm{D}_h(f)(x)$ est continue sur U).

Théorème fondamental : si les dérivées partielles sont continues sur U, alors f admet, en tout point a de U, un développement limité à l'ordre un, ainsi qu'une dérivée selon tout vecteur h, et

$$\mathrm{D}_h f(a) = h_1 \mathrm{D}_1 f(a) + h_2 \mathrm{D}_2 f(a).$$

En particulier, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et l'application $h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ est une forme linéaire. Le gradient de f est défini, dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, par la relation

$$\mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a) | h).$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner la notation différentielle $\mathrm{d}f$, mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U.

Application au calcul des dérivées partielles d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans U.

En un point de U où une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U présente un extremum local, ses dérivées partielles sont nulles.

b) Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Algèbre $\mathcal{C}^k(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.
Les opérateurs différentiels D_h, et en particulier D_1 et D_2, sont des applications linéaires de $\mathcal{C}^k(U)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U)$, où $1 \leqslant k < +\infty$.

La démonstration du théorème de Schwarz, ainsi que tout énoncé concernant les formules de Taylor ou les conditions suffisantes d'existence d'extremums, sont hors programme.

c) Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ, par :

$$\vec{u}\,(\theta) = \cos\theta\ \vec{e_1} + \sin\theta\ \vec{e_2},$$

$$\vec{v}\,(\theta) = -\sin\theta\ \vec{e_1} + \cos\theta\ \vec{e_2}$$

où $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Coordonnées polaires d'un point de $\mathbf{R}^2$.

Relations

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}\,\theta} = \vec{v}, \quad \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,\theta} = -\vec{u}.$$

Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles f de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles de la fonction

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho\,\cos\theta, \rho\,\sin\theta).$$

3- Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles : calcul intégral

L'objectif est double :
- Effectuer une étude élémentaire de quelques notions de base sur les intégrales doubles sur un rectangle ; sur ce point, aucune démonstration n'est exigible des étudiants. Présenter une brève extension de ces notions pour des domaines d'intégration plus généraux ; sur ce point, aucune difficulté théorique ne doit être soulevée.
- Exploiter les résultats obtenus pour le calcul d'intégrales doubles et de grandeurs physiques (aires, volumes, moments, centres d'inertie) ; sur ces points, aucune difficulté théorique ne doit être soulevée, et notamment sur la régularité des domaines d'intégration.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'effectuer une brève extension aux intégrales triples mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

Définition de l'intégrale double d'une fonction f continue sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ et à valeurs réelles.
Notation $\int\int_R f = \int\int_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Linéarité, croissance, invariance par translation. Additivité par rapport au domaine d'intégration.
Décomposition de l'intégrale double en produit de deux intégrales simples lorsque $f(x, y) = g(x)\,h(y)$.

Théorème de Fubini : expression de l'intégrale double à l'aide de deux intégrations successives.

Brève extension au cas d'une fonction continue sur une partie A fermée bornée de $\mathbf{R}^2$; extension du théorème de Fubini lorsque A est constituée des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$ où φ et ψ sont des fonctions continues sur $[a, b]$. Toute démonstration sur ce cas plus général est hors programme.

Changement de variables affine, intégration sur un parallélogramme. Passage en coordonnées polaires. Intégration sur un disque, une couronne ou un secteur angulaire.

La démonstration de ces résultats, ainsi que tout énoncé général concernant les changements de variables, sont hors programme.

Travaux pratiques

Exemples de calcul et d'emploi de dérivées partielles.

Exemples de recherche d'extremums.

Exemples de calculs d'intégrales doubles ; exemples d'applications des intégrales simples et doubles au calcul d'aires planes, de volumes, de masses, de centres et de moments d'inertie.

IV. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Cette partie figure au programme de la seconde période.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ (où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$) et sont à valeurs dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. En outre, pour la présentation des notions du cours, on suppose que les arcs paramétrés Γ ainsi définis sont réguliers à l'ordre 1, c'est-à-dire que tous leurs points sont réguliers.

1- Courbes du plan

L'objectif est double :
- Étudier différents modes de définition des courbes planes (représentations cartésienne, paramétrique, polaire ; équation implicite).
- Étudier quelques propriétés métriques fondamentales des courbes planes (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure).

Il convient de relier l'étude des courbes définies par une équation implicite $F(x, y) = \lambda$ à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (lignes équipotentielles et lignes de champ).

a) Modes de définition d'une courbe plane

Courbe définie par une représentation cartésienne

$$x \mapsto y = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad y \mapsto x = \psi(y)$$

où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Courbe Γ définie par une représentation paramétrique

$$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t).$$

Étant donné un point régulier $M(t_0)$ de Γ, existence locale d'une représentation cartésienne de Γ au voisinage de t_0.

Courbe définie par une équation $F(x, y) = 0$, où F est une application de classe $\mathcal{C}^k$, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$, d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ dont le gradient en tout point de U est non nul.

Vecteurs directeurs de la tangente et de la normale en un point d'une ligne de niveau $F(x, y) = \lambda$.

L'énoncé du théorème des fonctions implicites est donné sous la forme suivante. En un point (a, b) de U tel que $F(a, b) = 0$ et que, par exemple, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, il existe des intervalles ouverts J et K de centres respectifs a et b tels que $J \times K$ soit contenu dans U et satisfaisant à la condition suivante : il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur J à valeurs dans K et une seule, telle que, pour tout point (x, y) de $J \times K$, les relations $F(x, y) = 0$ et $y = \varphi(x)$ soient équivalentes. La démonstration de ce théorème est hors programme.

Représentation polaire d'une courbe Γ définie par une représentation paramétrique f de classe $\mathcal{C}^k$, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$, d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ privé de 0 : il existe un couple (ρ, θ) de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I tel que, pour tout élément t de I, $f(t) = \rho(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big)$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne le repère polaire.

Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire.

Courbe définie par une équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ où ρ est de classe $\mathcal{C}^k$ et à valeurs réelles. Expression dans le repère polaire de vecteurs directeurs de la tangente et de la normale.

Les seules connaissances spécifiques exigibles des étudiants concernant l'étude de courbes définies par une équation polaire sont celles indiquées ci-contre.

Équation polaire d'un cercle passant par O, d'une conique de foyer O.

b) Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

Pour un arc orienté Γ régulier à l'ordre 1, repère de Frenet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$, abscisse curviligne. L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible ; représentation normale d'un arc. Longueur d'un arc.

Par définition, une abscisse curviligne est une fonction s de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que

$$s'(t) = \|f'(t)\|_2.$$

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne ; toute définition géométrique d'une telle longueur est hors programme.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, où $2 \leqslant k < +\infty$, existence d'une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I telle que, pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\,\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{e_2}$.

Relations
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha.$$

Définition de la courbure $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$; caractérisation des points biréguliers.

Relations
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}.$$

Aucune connaissance spécifique sur le centre de courbure, le cercle osculateur, les développées et les développantes n'est exigible des étudiants.

Dans le cas d'un arc Γ birégulier, α est un paramétrage admissible. Rayon de courbure.

Relations $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \overrightarrow{N}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\alpha} = -\overrightarrow{T}.$

Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet.

2- Champs de vecteurs du plan et de l'espace

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les champs de vecteurs du plan et de l'espace :
- Dérivées partielles, divergence, rotationnel.
- Circulation, intégrale curviligne.
- Potentiel scalaire, caractérisation des champs admettant un potentiel scalaire.
- Formule de Green-Riemann dans le plan.

En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ Exemples d'emploi de représentations cartésiennes, paramétriques (en particulier polaires) et implicites pour la recherche de lieux géométriques, l'étude locale et globale des courbes planes. Exemples de tracés de courbes planes.

Exemples d'étude de propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure...).

Exemples simples de recherche de courbes planes définies par une condition différentielle.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires, d'algèbre et de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne.

La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur. Le programme combine, de façon indissociable, la mise en place des concepts de l'algèbre linéaire avec l'étude des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations, étude des automorphismes orthogonaux et des isométries. . .).

Le programme introduit aussi quelques notions sur les groupes, les anneaux et les corps mais, en classe MPSI, l'étude porte uniquement sur des exemples ; toute étude générale de ces structures est hors programme.

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (division euclidienne et recherche de PGCD dans $\mathbf{Z}$*, opérations élémentaires sur les matrices en algèbre linéaire. . .) et de calcul formel (polynômes et fractions rationnelles. . .) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.*

I. NOMBRES ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

1- Ensembles, applications

Ce chapitre figure au programme de la première période.

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire usuel sur les ensembles, les applications et les relations. Toute étude systématique, a fortiori toute axiomatique, de la théorie des ensembles est exclue.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.

a) Ensembles, opérations sur les parties

Ensembles, appartenance, inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.	Les éléments x d'un ensemble E satisfaisant à une relation $\mathcal{R}(x)$ constituent une partie de E, ce qui permet d'interpréter en termes ensemblistes l'implication, la conjonction et la disjonction de deux relations, ainsi que la négation d'une relation.

b) Applications, lois de composition

Une application f de E dans (vers) F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et son graphe G. Ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F. Ensemble E^I des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I. Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongements d'une application. Équations, applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection. Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.	Notations $E \xrightarrow{f} F$, $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$, la première étant très commode, notamment pour la composition des applications. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. La notion de correspondance entre deux ensembles est hors programme.

Définition des images directe et réciproque d'une partie ; compatibilité de l'image réciproque avec les opérations sur les parties.

Aucune connaissance spécifique sur les images directes et leurs relations avec les images réciproques n'est exigible des étudiants.

Fonction caractéristique d'une partie, lien avec les opérations sur les parties.

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition d'un monoïde, éléments inversibles. Notations additive et multiplicative d'une loi de composition.

Tout développement sur les monoïdes est hors programme.

c) Relations d'équivalence, relations d'ordre

Définition d'une partition d'un ensemble ; partition d'un ensemble E définie par une application de E dans F. Définition d'une relation d'équivalence.

La notion d'ensemble quotient est hors programme.

Définition d'une relation d'ordre, ordre total, ordre partiel. Majorants, minorants, plus grand et plus petit élément.

La notion de borne supérieure (ou inférieure) n'est étudiée que dans le cadre des nombres réels et des fonctions à valeurs réelles. La notion d'élément maximal est hors programme.

2- Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

Ce chapitre figure au programme de la première période.

En ce qui concerne les nombres entiers naturels et les ensembles finis, l'objectif principal est d'acquérir la maîtrise du raisonnement par récurrence. Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbf{N}$ *sont supposées connues ; toute construction et toute axiomatique de* $\mathbf{N}$ *sont hors programme.*

L'équipotence des ensembles infinis et la notion d'ensemble dénombrable sont hors programme.

En ce qui concerne la combinatoire, le programme se limite strictement aux exemples fondamentaux indiqués ci-dessous. L'objectif est d'apprendre à organiser les ensembles étudiés, ce qui permet en outre de les dénombrer. À cet effet, on exploitera les représentations graphiques par des arbres, et l'on mettra en valeur les méthodes suivantes : mise en bijection avec un ensemble déjà connu ; emploi d'une partition et du principe des bergers.

a) Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.

Les étudiants doivent maîtriser le raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs.

Suites d'éléments d'un ensemble E (indexées par une partie de $\mathbf{N}$). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.

On admet qu'étant donnés une application f de E dans E et un élément a de E, il existe une suite (u_n) et une seule d'éléments de E satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et à la condition initiale $u_0 = a$.

b) Ensembles finis

Définition : il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E ; cardinal (ou nombres d'éléments) d'un ensemble fini, notation $\operatorname{Card} E$. On convient que l'ensemble vide est fini et que $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

S'il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$, alors $p = n$; cas d'une injection, d'une surjection.

Toute partie E' d'un ensemble fini E est finie et

$$\operatorname{Card} E' \leqslant \operatorname{Card} E,$$

avec égalité si et seulement si $E' = E$.
Étant donnés deux ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, f est bijective si et seulement si f est surjective ou injective.

Les étudiants doivent connaître des exemples de parties strictes de $\mathbf{N}$ en bijection avec $\mathbf{N}$.
Une partie non vide P de $\mathbf{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée. Si P est finie non vide, il existe une bijection strictement croissante et une seule de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ sur P, où $n = \operatorname{Card} P$; la démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

c) Sommes et produits

Dans un monoïde commutatif E, somme (ou produit) d'une famille $(a_p)_{1 \leqslant p \leqslant n}$; notations $a_1 + a_2 + \ldots + a_p + \ldots + a_n$, $a_1 a_2 \ldots a_p \ldots a_n$, $\sum\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} a_p$, $\prod\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} a_p$.

L'objectif est la maîtrise sur des exemples des symboles $\sum$ et $\prod$. Les démonstrations des propriétés de ces symboles sont hors programme.

Brève extension au cas des familles $(a_i)_{i \in I}$ indexées par un ensemble fini I.

Suites arithmétiques, suites géométriques. Notations na et a^n.

Symbole $n!$ (on convient que $0! = 1$).

d) Opérations sur les ensembles finis, dénombrements

Si E et F sont des ensembles finis, $E \cup F$ l'est aussi ; cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes.
Si E et F sont des ensembles finis, $E \times F$ l'est aussi et

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \cdot \operatorname{Card} F.$$

Les étudiants doivent connaître la relation $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$, ainsi que son extension au cas de trois parties.

Étant donnés un entier p, des ensembles finis E et F, et une application f de E dans F tels que, pour tout élément b de F, $\operatorname{Card} f^{-1}(b) = p$, alors $\operatorname{Card} E = p \cdot \operatorname{Card} F$.

Cardinal de l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F ; cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
Étant donnés des ensembles finis E et F ayant respectivement p et n éléments, cardinal A_n^p de l'ensemble des injections de E dans F ; arrangements. Cas des bijections ; permutations.

Les étudiants doivent savoir utiliser ces résultats pour le dénombrement des p-listes d'éléments (des p-listes d'éléments distincts deux à deux) d'un ensemble fini.

Cardinal $\binom{n}{p}$, ou C_n^p, de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble E à n éléments. Combinaisons. Relations

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

Les étudiants doivent connaître les relations

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n,$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ (triangle de Pascal)}$$

ainsi que leur interprétation ensembliste.

3- Structures algébriques usuelles

Ce chapitre figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les structures algébriques usuelles suivantes : groupes, anneaux et corps, espaces vectoriels, algèbres. Toute étude des structures algébriques générales est hors programme.
Le programme se limite strictement aux notions de base indiquées ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.
Vu l'importance capitale de l'algèbre linéaire, le programme comporte l'étude des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire et d'algèbre ; cette étude fait l'objet d'un approfondissement dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (cf. parties II et III).
En revanche, l'étude des groupes, des anneaux et des corps porte uniquement sur des exemples :
- La notion de groupe est étudiée, en première période, dans le cadre des ensembles de nombres et, en seconde période, dans le cadre de l'algèbre linéaire et de la géométrie (cf. parties II et III).
- La divisibilité dans un anneau est étudiée dans le cadre de l'anneau $\mathbf{Z}$ *et de l'anneau* $K[X]$ *des polynômes.*

Toute étude générale des groupes, anneaux et corps est hors programme et, en particulier, les notions d'opération d'un groupe sur un ensemble, de conjugaison, de sous-groupe distingué, de morphisme d'anneau, d'idéal, ainsi que les constructions de $\mathbf{Z}$ *et de* $\mathbf{Q}$.

Pour la pratique en algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

a) Groupes

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, d'un isomorphisme. Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Groupe additif $\mathbf{Z}$ des nombres entiers.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus :
- en première période, des ensembles de nombres, notamment $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$;
- en seconde période, de l'algèbre linéaire et de la géométrie : groupe linéaire, groupe affine ; groupe orthogonal, groupe des isométries.

b) Sous-groupe engendré par un élément

(Seconde période)
Dans un groupe additif (ou multiplicatif) G, description du sous-groupe engendré par un élément a.
Morphisme $n \mapsto na$ (ou $n \mapsto a^n$) de $\mathbf{Z}$ dans G. Définition de l'ordre d'un élément ; définition d'un groupe cyclique.
Générateurs du groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.

Le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'étant pas au programme, le modèle de groupe cyclique d'ordre n est le groupe $\mathbf{U}_n$. Toute étude générale des groupes finis, et notamment le théorème de Lagrange, est hors programme.

c) Groupe symétrique

(Seconde période)
Définition du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$; cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ, signature d'une transposition.

Le groupe symétrique est introduit en relation avec la notion de déterminant. Son étude n'est pas un objectif en soi.

L'application $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$; définition du sous-groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

d) Anneaux et corps

Définition d'un anneau (ayant un élément unité), d'un sous-anneau. Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire $\sum$.
Groupe A^* des éléments inversibles d'un anneau A non réduit à $\{0\}$.
Définition d'un corps (commutatif et non réduit à $\{0\}$), d'un sous-corps.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus :
- des ensembles de nombres $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$;
- des polynômes et fractions rationnelles.

Anneau intègre A (commutatif, sans diviseur de 0, et non réduit à $\{0\}$). Corps des fractions K de A.
Anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers, corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Relation d'ordre, valeur absolue.

Il existe un corps K, unique à un isomorphisme près, tel que A soit un sous-anneau de K, et que tout élément de K s'écrive $\dfrac{a}{b}$, où $a, b \in A$, $b \neq 0$. La démonstration de ce résultat est hors programme.

Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans $\mathbf{Z}$, algorithme de la division euclidienne.

Les étudiants doivent connaître la structure des sous-groupes du groupe additif $\mathbf{Z}$.

Calculs dans un anneau commutatif et dans un corps. Formule du binôme. Relation

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Brève extension au cas d'éléments d'un anneau qui commutent.

e) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur un corps K, définition d'un sous-espace vectoriel, d'une application linéaire, d'une forme linéaire. Composée de deux applications linéaires. Définition d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme.
L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
Espace vectoriel produit $E \times F$. Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F ; linéarité des applications $v \mapsto v \circ u$ et $u \mapsto v \circ u$.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, et notamment :
- l'espace vectoriel K^n ;
- l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X, K)$ des applications d'un ensemble X dans K ;
- les espaces vectoriels de suites et de fonctions ;
- l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices à coefficients dans K à n lignes et p colonnes (en seconde période).

Équations linéaires ; noyau et image d'une application linéaire. Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Définition des relations linéaires entre p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel.

On traite d'abord le cas d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$, puis on étend brièvement ces notions au cas des familles finies $(x_i)_{i \in I}$. Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme.

Intersection de sous-espaces vectoriels ; définition du sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Description du sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires, notation $E = F \oplus G$. Projecteurs associés.

La notion générale de somme directe est hors programme.

f) Algèbres

Définition d'une K-algèbre associative unitaire ; une telle algèbre est munie d'une structure d'anneau. Définition d'une sous-algèbre, d'un morphisme d'algèbres, d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme.

Algèbre $\mathcal{F}(X, K)$ des applications d'un ensemble X dans le corps K.
Algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E ; homothéties, caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, et notamment :
- la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{C}$ des nombres complexes ;
- l'algèbre $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K ;
- les algèbres de suites et de fonctions :
- l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices à coefficients dans K à n lignes et n colonnes (en seconde période).

L'étude générale des algèbres est hors programme.

4- Arithmétique élémentaire

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base de la divisibilité des nombres entiers, et de les exploiter pour la résolution de quelques problèmes simples d'arithmétique.
L'étude des congruences et la définition de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ *sont hors programme.*

a) Numération

(Première période)

Définition de la numération des entiers naturels en base a. Numération décimale ; numération binaire, algorithme d'exponentiation rapide.

Algorithmes d'addition et de multiplication de grands entiers. En dehors de ce point, aucune connaissance spécifique sur la numération dans des bases autres que 2 et 10 n'est exigible des étudiants.

b) Divisibilité dans l'anneau $\mathbf{Z}$

(Seconde période)

Diviseurs communs à deux nombres entiers ; nombres premiers entre eux. PGCD de deux entiers ; algorithme d'Euclide. PPCM de deux entiers ; forme irréductible d'un nombre rationnel.

La définition des idéaux de $\mathbf{Z}$ est hors programme.

Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

Les étudiants doivent connaître l'algorithme donnant les coefficients de l'égalité de Bézout.

Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers. L'ensemble des nombres premiers est infini.

5- Polynômes et fractions rationnelles

Ce chapitre figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractions rationnelles, et d'exploiter ces objets formels pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Dans les paragraphes b), c) et e), on suppose que le corps de base K *est un sous-corps de* $\mathbf{C}$.

Pour la pratique, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

a) Algèbre $K[X]$ et corps $K(X)$

Algèbre $K[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps K.

Notations $a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

Degré d'un polynôme (on convient que le degré de 0 est $-\infty$), coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à p constituent un sous-espace vectoriel de $K[X]$.
L'anneau $K[X]$ est intègre. Corps $K(X)$ des fractions rationnelles, degré d'une fraction rationnelle.

Aucune connaissance sur la construction de $K[X]$ et de $K(X)$ n'est exigible des étudiants.
Définition du composé de deux polynômes :
si $P(X) = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$, $P \circ Q = \sum_{n=0}^{p} a_n Q^n$.
Aucun développement sur la composition n'est au programme.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans $K[X]$, algorithme de la division euclidienne.

b) Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Équations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales.

Reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X - a$; caractérisation des zéros de P.

Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité.

Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

Les étudiants doivent connaître les relations

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a),$$

$$P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

c) Polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur K ; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'un polynôme n'est exigible des étudiants.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss n'est pas exigible des étudiants.

Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{R}$.

Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n - 1$.

d) Divisibilité dans l'anneau $K[X]$

(Seconde période)

Diviseurs communs à deux polynômes, polynômes premiers entre eux. PGCD de deux polynômes ; algorithme d'Euclide. PPCM de deux polynômes ; forme irréductible d'une fraction rationnelle.

La définition des idéaux de $K[X]$ est hors programme.

Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

Les étudiants doivent connaître l'algorithme donnant les coefficients de l'égalité de Bézout.

Polynômes irréductibles. Existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

Pour la pratique de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, le programme se limite au cas où $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Aucune connaissance spécifique sur l'irréductibilité sur $\mathbf{Q}$ n'est exigible des étudiants.

e) Étude locale d'une fraction rationnelle

(Seconde période)

Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; existence et unicité de la partie polaire de R relative à un pôle a. Lorsque a est un pôle simple de R, expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle double. En revanche, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies pour des pôles d'ordre supérieur ou égal à 3. La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

Lorsque $K = \mathbf{C}$, toute fraction rationnelle R est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de R en éléments simples. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que $\mathbf{C}$ n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de problèmes de sommation.

Il convient de mettre en valeur les méthodes utilisées (emploi de récurrences, de polynômes...).

Exemples d'étude de problèmes de dénombrement.

Le programme se limite à des exemples d'applications directes des résultats du cours.

Exemples de recherche de polynômes satisfaisant à des conditions données (interpolation, équations aux différences finies, équations différentielles...).

Aucune connaissance spécifique sur les méthodes d'interpolation n'est exigible des étudiants.

§ Exemples d'étude de problèmes de divisibilité dans $K[X]$ (recherche de diviseurs, recherche de PGCD, obtention de décompositions en produit de facteurs irréductibles...).

§ Exemples d'étude d'équations algébriques à coefficients réels ou complexes.

En dehors du cas de $z^n = a$, aucune connaissance spécifique sur les équations d'ordre supérieur ou égal à 3 n'est exigible des étudiants.

§ Pratique de la décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ d'une fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles.

En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies. L'obtention de décompositions en éléments simples n'est pas un objectif en soi ; tout excès de technicité sur ce point est à éviter.

§ Exemples d'étude de problèmes de divisibilité dans $\mathbf{Z}$ (recherche de diviseurs, recherche de PGCD, obtention de décompositions en produit de facteurs premiers…).

En dehors des cas usuels en base dix, l'étude des propriétés de divisibilité d'un nombre à partir de son écriture dans une base est hors programme.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

Cette partie figure au programme de la seconde période.

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie affine réelle (sous-espaces affines, barycentres, applications et transformation affines).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

Dans toute cette partie, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et, pour la pratique, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Espaces vectoriels de dimension finie

L'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires est à mener de front avec celle du calcul matriciel.

a) Familles libres, familles génératrices, bases

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de K^n.
Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_j) = f_j$.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un K-espace vectoriel E détermine une application linéaire de K^p dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrices, des familles libres.

b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases.

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle.
Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n ; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Étant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- si S est libre, alors $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base ;
- si S est génératrice, alors $p \geqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base.

Base de $E \times F$ associée à des bases de E et de F ; dimension de $E \times F$.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_j)$ et un espace vectoriel F muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.

Étant donnée une forme linéaire φ sur E, expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

La famille $(u_{i,j})$ des applications linéaires coordonnées de E dans F associées à ces bases est une base de $\mathcal{L}(E,F)$. Plus précisément, $u = \sum \alpha_{i,j}\, u_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ est la i-ième coordonnée dans C de l'image $u(e_j)$. Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

La famille des formes linéaires coordonnées associée à une base de E est une base de l'espace vectoriel, noté E^*, des formes linéaires sur E. Dimension de E^*.

La théorie de la dualité, et notamment la notion d'orthogonalité, est hors programme.

c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$. Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$.

d) Rang d'une application linéaire

Étant donnée une application linéaire u de E dans F, u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$; en particulier,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u.$$

Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan.

Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes.

Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Caractérisation des éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$; homothéties de rapport non nul, affinités, symétries. Caractérisation des symétries par la relation $s^2 = I_E$.

L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

2- Calcul matriciel

Le calcul matriciel présente deux aspects qu'il convient de mettre en valeur :
- Calcul sur des tableaux de nombres, interprétés en termes d'applications linéaires de K^p dans K^n munis de leurs bases canoniques.
- Expression dans des bases d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre.
Un des objectifs importants est d'interpréter matriciellement un changement de base dans un espace vectoriel, puis d'étudier l'effet d'un changement de base(s) sur la matrice associée à un endomorphisme (à une application linéaire). En revanche, les notions de matrices semblables et de matrices équivalentes sont hors programme.

a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes sur un corps K. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(K^p, K^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Définition du produit matriciel, bilinéarité.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de K^n, des matrices lignes et des formes linéaires sur K^p.
Écriture matricielle $Y = M\,X$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées à n lignes. Isomorphisme canonique de l'algèbre $\mathcal{L}(K^n)$ sur l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$.

Sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Écriture matricielle ${}^tY\,X$ de l'effet d'une forme linéaire sur un vecteur.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

Lorsque K est un sous-corps de $\mathbf{C}$, les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces supplémentaires.

b) Matrices et applications linéaires

Matrice $M_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base B dans un espace vectoriel F muni d'une base C. L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

La j-ième colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base C de l'image par u du j-ième vecteur de la base B.

Matrice $M_B(u)$ associée à un endomorphisme u d'un espace vectoriel E muni d'une base B. L'application $u \mapsto M_B(u)$ est un isomorphisme d'algèbres.
Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires.

Matrice de passage d'une base B à une base B' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

La matrice de passage de la base B à la base B' est, par définition, la matrice de la famille B' dans la base B : sa j-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base B du j-ième vecteur de la base B'. Cette matrice est aussi $M_{B',B}(I_E)$.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice. Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes :
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$).

Application à l'inversion d'une matrice carrée par la méthode du pivot de Gauss.

Cette méthode permet en outre d'étudier l'inversibilité de la matrice.

d) Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).

Pour toute application linéaire u de E dans F, le rang de u est égal au rang de $M_{B,C}(u)$, où B est une base de E et C une base de F.

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme UJ_rV où U et V sont des matrices carrées inversibles. Invariance du rang par transposition.
Emploi des opérations élémentaires pour le calcul du rang d'une matrice.

La matrice J_r est l'élément $(\alpha_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ défini par les relations :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

e) Systèmes d'équations linéaires

Définition, système homogène associé ; interprétations. Description de l'ensemble des solutions.
Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues, à l'aide des vecteurs de K^n, des formes linéaires sur K^p, et d'une application linéaire de K^p dans K^n (ainsi que la traduction matricielle correspondante).

Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires. Emploi de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes de Cramer.

Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

3- Géométrie affine réelle

L'objectif essentiel est d'exploiter les outils de l'algèbre linéaire pour approfondir l'étude des propriétés affines du plan et de l'espace, déjà abordée dans les classes antérieures. En revanche, l'étude des espaces affines généraux est hors programme ; le programme se place dans le cadre des sous-espaces affines des espaces vectoriels et des applications affines d'un espace vectoriel dans un autre. Afin de relier ce point de vue à celui adopté dans les classes antérieures, il convient de donner brièvement la définition d'un espace affine V de direction un espace vectoriel E, et de signaler que le choix d'une origine permet d'identifier espace affine et espace vectoriel. Dans tout le programme, on effectue cette identification.

Dans ce chapitre, le corps de base est $\mathbf{R}$ et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.
Pour la pratique, le programme se limite à l'étude du plan et de l'espace, illustrée de nombreuses figures.

a) Translations, sous-espaces affines

Translations d'un espace vectoriel E ; notation $A+x$ où A est un point de E et x un vecteur de E.	Les éléments de E sont appelés indifférement vecteurs ou points.
Définition d'un sous-espace affine W (c'est-à-dire une partie de E de la forme $A+F$, où F est un sous-espace vectoriel de E). Direction et dimension d'un sous-espace affine ; vecteurs directeurs d'un sous-espace affine.	
Sous-espaces affines parallèles.	On dit qu'un sous-espace affine W est parallèle à un sous-espace affine W' si la direction de W est un sous-espace vectoriel de celle de W'.
Intersection de deux sous-espaces affines, direction et dimension de cette intersection lorsqu'elle n'est pas vide.	Les étudiants doivent maîtriser les relations d'incidence entre droites du plan, et entre droites et plans de l'espace. En revanche, l'étude des relations d'incidence en dimension quelconque est hors programme.

b) Applications affines, transformations affines

Définition d'une application affine d'un espace vectoriel dans un autre, application linéaire associée ; translations, homothéties, projections. Image d'un sous-espace affine par une application affine.	Les étudiants doivent savoir qu'une application affine conserve l'alignement et le parallélisme. En revanche, l'étude générale des applications affines est hors programme.
Étant donné un point A de E, toute application affine f de E dans lui-même s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $f = t \circ u$ où t est une translation et où u fixe A.	Les applications affines fixant A peuvent s'identifier aux endomorphismes de E.
Définition d'un isomorphisme affine, d'un automorphisme affine (ou transformation affine). Définition du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$; translations, homothéties de rapport non nul, affinités, symétries. Morphisme de $\mathrm{GA}(E)$ dans $\mathrm{GL}(E)$; sous-groupe des translations, sous-groupe des homothéties- translations.	L'étude générale du groupe affine est hors programme.

c) Repères cartésiens

Repères cartésiens d'un sous-espace affine W, repère cartésien canonique de $\mathbf{R}^n$; coordonnées d'un point, expression d'une application affine. Changement d'origine, changement de repère.	Un repère cartésien de W est un couple formé d'un point de W et d'une base de la direction de W.
Équations cartésiennes d'une droite du plan, d'un plan de l'espace. Définition d'une droite de l'espace par deux équations.	L'étude générale des équations définissant un sous-espace affine est hors programme.
Définition d'un paramétrage d'un sous-espace affine W de dimension p (isomorphisme affine de $\mathbf{R}^p$ sur W). Paramétrage d'une droite, d'une demi-droite, d'un plan, d'un demi-plan.	La donnée d'un repère cartésien de W détermine un paramétrage de W.

d) Barycentres

Définition des barycentres, associativité. Stabilité d'un sous-espace affine par barycentration.
Définition d'un segment, paramétrage d'un segment.
Définition d'une partie convexe.

La caractérisation des sous-espaces affines à l'aide des barycentres, les notions de coordonnées barycentriques, de repère affine et d'enveloppe convexe sont hors programme.

Image d'un barycentre par une application affine.

La caractérisation des applications affines à l'aide des barycentres est hors programme.

4- Déterminants

a) Applications multilinéaires

Définition d'une application n-linéaire, applications n-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

Il convient de donner de nombreux exemples d'applications bilinéaires issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. En revanche, l'étude générale des applications bilinéaires et multilinéaires est hors programme.

b) Déterminant de n vecteurs

Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

La démonstration de l'existence et de l'unicité du déterminant n'est pas exigible des étudiants.
Dans le plan, lignes de niveau de

$$M \mapsto \operatorname{Det}_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}),$$

équation d'une droite du plan. Extension à l'espace.

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie ; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes d'un espace vectoriel orienté.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

Relation

$$M.{}^t\mathrm{Com}\, M = {}^t\mathrm{Com}\, M.M = (\operatorname{Det} M)\, I_n,$$

où $\mathrm{Com}\, M$ désigne la matrice des cofacteurs de M.
Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs.
Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires et de changements de bases, notamment pour l'étude des équations linéaires.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels K^n et $\mathcal{M}_n(K)$, ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions (calcul de la puissance n-ième d'une matrice, interpolation, étude d'équations aux différences finies, de suites récurrentes linéaires, d'équations différentielles...).

Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires (résolution des systèmes de Cramer, détermination du rang, recherche d'une base de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène, existence et calcul d'une solution particulière lorsque $r = n$ ou $r = p$).

Lorsque $p \leqslant 3$, en liaison avec l'étude de l'incidence des droites du plan et des plans de l'espace, les étudiants doivent savoir expliciter l'ensemble des solutions quel que soit le rang.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, l'inversion des matrices carrées, la détermination du rang d'une matrice.

Exemples de calcul et d'emploi de déterminants.

Le calcul de déterminants n'est pas un objectif en soi ; tout excès de technicité sur ce point est à éviter.

III. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Cette partie figure au programme de la seconde période.

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur le produit scalaire, sur les espaces vectoriels euclidiens (bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, isométries, déplacements, similitudes directes).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et automorphismes orthogonaux, points et isométries) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie affine euclidienne et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

La mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^2$ *est définie à* 2π *près, par l'application* $\theta \mapsto e^{i\theta}$ *de* $\mathbf{R}$ *sur* $\mathbf{U}$*. Toute définition géométrique des angles est hors programme.*

Dans toute cette partie, le corps de base est $\mathbf{R}$*.*

1- Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens

a) Produit scalaire

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ (noté aussi en géométrie $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \mapsto \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$) sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.
Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} fg$ dans $\mathcal{C}([a, b])$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} fg$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$.

Relations entre produit scalaire et norme :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y),$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y),$$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$
$$4(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

(identité de polarisation).

Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de ces relations (triangle et parallélogramme).

b) Espaces euclidiens

Définition d'un espace vectoriel euclidien.

Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale. Base orthonormale associée à une base par la méthode de Schmidt.
La donnée d'une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n détermine un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) sur E.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F, et noté $F^{\perp}$ ou F°.

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$, où a est un vecteur.

Projecteurs orthogonaux. Caractérisation des projecteurs orthogonaux par les relations $p^2 = p$ et $\big(p(x)|y\big) = \big(x|p(y)\big)$. Définition de la distance d'un point x à un sous-espace F ; expression de cette distance à l'aide de la projection orthogonale de x sur F.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace muni d'une base orthonormale ; calcul de la distance d'un point à un tel sous-espace. Matrice associée à un projecteur orthogonal dans une base orthonormale.

Dans un espace vectoriel euclidien orienté E, la donnée d'une orientation d'une droite D induit une orientation de l'hyperplan $D^{\perp}$.

Application aux cas où E est de dimension 2 ou 3.

c) Automorphismes orthogonaux

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire un automorphisme de E conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

Définition du groupe orthogonal $O(E)$; symétries orthogonales, réflexions.
Étant donnés deux vecteurs distincts a et b de E tels que $\|a\| = \|b\|$, il existe une réflexion et une seule échangeant a et b.

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme.

Définition des matrices orthogonales et du groupe $O(n)$, caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes.
Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale.
Changement de base orthonormale.

Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations

$$ {}^tM\,M = I_n \quad \text{ou} \quad M\,{}^tM = I_n. $$

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal ; déterminant d'une réflexion. Définition du groupe spécial orthogonal $SO(E)$ (rotations), du groupe $SO(n)$.

Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormale directe.
L'étude générale du groupe des rotations est hors programme.

Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n, déterminant de n vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\text{Det}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de $|\text{Det}\,(a,b)|$ et de $|\text{Det}\,(a,b,c)|$ en termes d'aire et de volume.

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, produit vectoriel, notations $u \wedge v$ ou $u \times v$.

Expression des coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.

d) Automorphismes orthogonaux du plan

Dans un plan euclidien E, tout automorphisme orthogonal est soit une réflexion, soit le produit de deux réflexions. Le groupe $SO(E)$ est commutatif.

Étude de la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs a et b non nuls.

Relations

$$ (a|b) = \|a\|\,\|b\|\,\cos\theta,\ \text{Det}\,(a,b) = \|a\|\,\|b\|\,\sin\theta. $$

Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation ; matrice de rotation $R(\theta)$ associée à un nombre réel θ ; morphisme $\theta \mapsto R(\theta)$ de $\mathbf{R}$ sur $SO(2)$.

Si u est la rotation d'angle de mesure θ, alors pour tout vecteur unitaire a,

$$ \cos\theta = \big(a|u(a)\big), \quad \sin\theta = \text{Det}\,\big(a, u(a)\big). $$

e) Automorphismes orthogonaux de l'espace

Dans un espace euclidien de dimension 3, tout automorphisme orthogonal est le produit d'au plus trois réflexions.

Étude de la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3, mesure θ (où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) de l'angle de deux vecteurs a et b non nuls.

Relations

$$ (a|b) = \|a\|\,\|b\|\,\cos\theta,\ \|a \wedge b\| = \|a\|\,\|b\|\,\sin\theta. $$

Axe et mesure de l'angle d'une rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Étant donnée une rotation u d'axe dirigé par un vecteur unitaire a et d'angle de mesure θ (modulo 2π), l'image d'un vecteur x orthogonal à l'axe est donnée par

$$u(x) = (\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, a \wedge x.$$

Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et la mesure de l'angle d'une rotation, ainsi que l'image d'un vecteur quelconque et la matrice associée à cette rotation dans une base orthonormale directe.
En revanche, l'étude générale de la réduction des automorphismes orthogonaux de l'espace est hors programme.

2- Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

a) Distances, angles

Repères orthonormaux.
Sous-espaces affines orthogonaux du plan et de l'espace ; projections orthogonales.
Distance d'un point à une droite du plan, à une droite ou un plan de l'espace.
Dans le plan euclidien orienté, mesure de l'angle orienté de deux demi-droites.
Dans l'espace euclidien de dimension 3, mesure de l'angle de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Les étudiants doivent savoir calculer les projections orthogonales, les distances et les mesures des angles indiqués ci-contre, et savoir les exprimer dans un repère orthonormal.

Étude des lignes de niveau de $M \mapsto (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{AM})$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire.

Équations normales d'une droite dans le plan, d'un plan dans l'espace.

b) Isométries du plan et de l'espace

Définition d'une isométrie du plan (resp. de l'espace) : transformation affine conservant les distances. Définition d'un déplacement. Translations, réflexions, rotations. Les isométries, les déplacements, constituent des sous-groupes du groupe affine du plan (resp. de l'espace).

Étude du produit de deux réflexions du plan (resp. de l'espace).
L'étude générale des isométries du plan (resp. de l'espace) est hors programme.

Étant donnés deux points distincts A et B du plan ou de l'espace, il existe une réflexion et une seule échangeant A et B.
Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.
Tout déplacement de l'espace est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.

Les étudiants doivent savoir calculer l'image d'un point M par cette réflexion.

c) Similitudes directes du plan

Définition d'une similitude (transformation affine multipliant les distances dans un rapport donné) ; rapport de similitude. Définition d'une similitude directe. Homothéties de rapport non nul, translations, rotations. Les similitudes, les similitudes directes, constituent des sous-groupes du groupe affine du plan.
Écriture complexe d'une similitude directe. Centre et mesure de l'angle d'une similitude directe distincte d'une translation.

L'étude générale des similitudes du plan est hors programme.
Les étudiants doivent connaître l'effet d'une similitude directe sur les angles orientés et les aires.

Étant donnés deux segments AB et $A'B'$ de longueur non nulle, il existe une similitude directe et une seule transformant A en A' et B en B'.

Les étudiants doivent savoir déterminer le rapport, la mesure de l'angle et le centre de cette similitude directe lorsqu'elle n'est pas une translation.

d) Cercles et sphères

Dans le plan, intersection d'un cercle et d'une droite.
Dans l'espace, intersection d'une sphère et d'un plan.
Équations cartésiennes d'un cercle, d'une sphère.

Caractérisation d'un cercle et d'une sphère par l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où AB est un diamètre.

e) Coniques

Dans le plan, lignes de niveau de $\dfrac{MF}{MH}$; définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.

Effet d'une similitude sur une conique. Caractérisation des ellipses et des hyperboles à l'aide des lignes de niveau de $MF + MF'$ et de $|MF - MF'|$ (définition bifocale).

Définition d'une conique par une équation cartésienne (dans un repère orthonormal) de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0.$$

Équation réduite.

En dehors du cas indiqué ci-contre et de celui des hyperboles définies par une relation $xy = \lambda$, aucune connaissance spécifique sur la réduction des coniques définies par une équation cartésienne n'est exigible des étudiants.

Image d'un cercle par une affinité orthogonale.

Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.

Travaux pratiques

§ Exemples de construction de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux, et d'emploi de bases orthonormales, de supplémentaires orthogonaux et de changements de base orthonormale.

Il convient d'exploiter l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions. Aucune connaissance spécifique sur les polynômes orthogonaux n'est exigible des étudiants.

§ En dimensions 2 et 3, exemples d'emploi du produit scalaire, du produit vectoriel et du produit mixte pour l'étude de configurations du plan et de l'espace (calcul de projections orthogonales, de distances, de mesures d'angles, d'aires, de volumes...).

§ En dimensions 2 et 3, exemples de recherche de lignes de niveau, définies notamment par des conditions portant sur des distances et des mesures d'angles.

Dans le plan, lignes de niveau de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, de $\displaystyle\sum_i \alpha_i {MA_i}^2$, de $\dfrac{MA}{MB}$ et de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Exemples de recherche des isométries laissant invariante une configuration du plan, de recherche des déplacements et des réflexions laissant invariante une configuration de l'espace.

Exemples de recherche et d'emploi de déplacements et de similitudes directes pour l'étude de configurations planes.